

Дискретная математика

Практические занятия

Судаков Владимир Анатольевич

sudakov@ws-dss.com

2019

Некоторые задания будут

На сайте ws-dss.com

Зарегистрироваться

Сообщить старосте свой адрес электронной
почты

Разбиться на группы по 2-3 человека

Soft skills— это важно.

Контроль успеваемости

- Практические занятия + домашние задания
- Контрольная работа
- Зачет (1 семестр) + Экзамен (2 семестр)

Посещаемость учитывается

Оценки:

- - Неудовлетворительный ответ – неправильный ответ
- +- Удовлетворительный ответ – ответ с частично правильным ходом мысли или ответ: «я не понимаю, объясните, пожалуйста»
- + Весьма удовлетворительный ответ – правильный ответ

Литература

- Хаггард Г., Шлипф Дж., Уайтсайдс С. Дискретная математика для программистов. – М.: БИНОМ, 2010.
- Гисин В.Б. Дискретная математика. Учебное пособие и практикум. — М. «Юрайт», 2016. — 384 с.
- Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. - СПб: Лань, 2009.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. М.: Вильямс, 2004. – 960 с.
- Пенроуз Р. Новый ум короля. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
- Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2016. – 528 с.

Давайте знакомиться (1)

Кто на каких линиях метро живет? Кто откуда?

....

1	Сокольническая
2	Замоскворецкая
3	Арбатско-Покровская
4	Филевская
5	Кольцевая
6	Калужско-Рижская
7	Таганско-Краснопресненская
8	Калининско-Солнцевская
9	Серпуховско-Тимирязевская
10	Люблинско-Дмитровская
11А	Каховская
12	Бутовская
14	МЦК
М	Монорельс
11	БКЛ Большая Кольцевая
15	Некрасовская

1	Центральный	ЦФО
2	Северо-Западный	СЗФО
3	Южный	ЮФО
4	Северо-Кавказский	СКФО
5	Приволжский	ПФО
6	Уральский	УрФО
7	Сибирский	СФО
8	Дальневосточный	ДФО

Запишите множества

1. Все студенты _____ изучающие дискретную математику
2. Все студенты _____ которые
3. Все студенты _____ которые _____ и _____
4. Все студенты _____ и _____ которые _____
5. Все студенты _____ которые _____ или _____

Решите задачи

Определить мощности множеств

(a) $A = \emptyset$

(b) $B = \{\emptyset\}$

(c) $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$

(d) $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$

(e) $E = \{0, \{\{1, \{3, 5\}, \{4, 5, 7\}, 8\}\}\}$

Какие из следующих пар множеств равны. Для каждой пары неравных множеств запишите один элемент, который есть в одном множестве, но которого нет в другом множестве

(a) $\{0, 1, 2\}$ и $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$

(b) $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ и $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$

(c) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 5, 1, 3\}\}$ и $\{\{3, 5, 1\}, \{6, 4, 4, 4, 2\}, \{2, 4, 4, 2, 6\}\}$

(d) $\{\{5, 3, 5, 1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3, 3\}\}$ and $\{\{1, 3, 5, 1\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 6, 4, 4, 6\}\}$

(e) $\emptyset$ и $\{x \in \mathbb{N}: x > 1 \text{ и } x^2 = x\}$

(f) $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$

Решите задачи

Даны множества:

$$A = \{0, 2, 4, 6\} \quad B = \{1, 3, 5\} \quad C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$D = \emptyset \quad E = \mathbb{N} \quad F = \{\{0, 2, 4, 6\}\}$$

Перечислите все их подмножества

Пусть $A = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 2k + 1 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ и } n = 4k + 1 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{m \in \mathbb{N} : m = 2k - 1 \text{ и } k \in \mathbb{N} \text{ и } k \geq 1\}$. Доказать следующее:

- (a) $35 \in A$
- (b) $35 \in C$
- (c) $35 \notin B$
- (d) $A = C$
- (e) $B \subseteq A$
- (f) $B \subseteq C$
- (g) $B \subset A$
- (h) $B \subset C$

Отношения

По бригадам (2-3 человека)

- Постройте Генеалогическое дерево (3-4 уровня). Если кто-то не помнит – придумывайте имена.
- Запишите отношения: Родитель, Ребенок, В Браке, Бабушка/Дедушка, Одного Поколения, Брат/Сестра, Кузен/Кузина, Предок, Потомок, Дядя/Тетя

Задачи на отношения

Пусть $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Пусть $R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (3, 5), (3, 7), (4, 6), (6, 8), (7, 10)\}$ отношение на A . Пусть $S = \{(2, 4), (3, 6), (5, 7), (7, 9), (8, 10), (8, 9), (8, 8), (9, 9), (3, 8), (4, 9)\}$ второе отношение на A . Найти:

- 1) $R \circ S$
- 2) $S \circ R$.

- Решить на сайте [ws-dss.com relation_task](http://ws-dss.com/relation_task)

Задачи на отношения (2)

- Какие из следующих отношений на множестве всех людей рефлексивны? Симметричны? Антисимметричны? Транзитивны? Обоснуйте Ваш ответ.
 - (a) xRy Если y зарабатывает больше чем x .
 - (b) xRy Если x и y примерно одного роста.
 - (c) xRy Если x и y общий предок.
 - (d) xRy Если x и y одного пола.
 - (e) xRy Если x и y собирают марки.
 - (f) xRy Если x и y иногда нравится одна и та же музыка.

Задачи на отношения (3)

Какие из следующих отношений на множестве всех людей рефлексивны? Симметричны? Антисимметричны? Транзитивны? Обоснуйте Ваш ответ.

(a) xRy Если x и y или оба любят вьетнамскую кухню или оба не любят вьетнамскую кухню.

(b) xRy Если (1) x и y оба любят итальянскую кухню или оба не любят ее, или (2) x и y оба любят китайскую кухню или оба не любят ее.

(c) xRy Если y по крайней мере на 10 см. выше x .

Докажите по индукции

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ for $n \geq 0$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ for $n \geq 0$

(c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)/30$ for $n \geq 0$

(d) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$ for $n \geq 0$

Докажите по индукции для $n \geq 0$

(a) 3 divides $n^3 + 2n$

(b) 5 divides $n^5 - n$

(c) 6 divides $n^3 - n$

(d) 6 divides $n^3 + 5n$

Проверка свойств функции

- Пусть $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ и $Y = \{-4, -2, 0, 2\}$.
- Определим функцию $F: X \rightarrow Y$ $F(x) = x^2 - x$
- Доказать, что она не сюръективна и не инъективна

Принцип включения/исключения

- В группе 35 студентов, все биологи или блондины и других нет. Биологов среди них 27, а блондинов 21. Сколько биологов блондины?
- В группе режиссуры 33 студента любят фильмы Хичкока, 21 студент любит фильмы Спилберга и 17 студентов любят фильмы обоих этих режиссеров. Сколько студентов в этой группе, если каждый из них попал в какую-нибудь категорию?
- В теннисном лагере 39 игроком. Из них 25 человек левши, 22 человека бьют с задней линии двумя руками, и других нет. Сколько левшей бьют с задней линии двумя руками?

Принцип включения/исключения

- В классе маркетинга собрали данные о заведениях быстрого питания поблизости от кампуса:

Тип продукта	Число заведений	Тип продукта	Число заведений
Гамбургеры	15	Гамбургеры и пицца	10
Курица	25	Курица и пицца	14
Пицца	21	Гамбургеры, курица и пицца	9
Гамбургеры и курица	11	Ничего из перечисленного	5

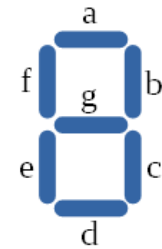
Сколько заведений быстрого питания находятся поблизости от кампуса?

Принцип включения/исключения

- 76 студентов записались на курс антропология. Каждый из них должен посещать оба или один из курсов психология или поэзия. Среди этих 76 студентов 35 записались на психологию и 49 на поэзию. Сколько студентов посещают все три курса?
- На курсы Bio, Poli, Econ и Fina записались 108, 203, 315 и 212 студентов соответственно. Никто не посещает все четыре курса. Ни один студент не записан одновременно на курсы Bio, Fina и Poli. Никто не посещает Econ и Fina в течение одного и того же семестра. На Poli и Fina нельзя записываться в течение одного и того же семестра. 39 студентов записаны одновременно на Bio, Poli и по 48 студентов на Poli и Econ и на Bio и Econ. На три курса Bio, Poli, Econ одновременно записаны 73 человека, а на курсы Bio и Fina – 67 человек. Сколько всего студентов посещают эти четыре курса?

Комбинаторика

- Сколько различных символов можно сформировать на индикаторе:



- По физике можно выбрать один из 3-х лекционных курсов, один из 7 курсов семинаров и один из 5 курсов лабораторных, сколько всего вариантов выбора есть?
- Сколько вариантов пароля существует, если пароль состоит из 6 латинских букв и цифр?

Комбинаторика

- Сколько есть способов выбрать из шести пар различных перчаток одну перчатку на левую руку и одну на правую, чтобы они оказались из различных пар?
- Сколько натуральных чисел не меньше 1000 и больше 5400 обладают следующими свойствами:
 - все цифры числа разные?
 - в записи числа нет цифр 2 и 7?
- Сколько n буквенных палиндромов можно составить из алфавита $\{0, 1\}$?

Комбинаторика

- Сколько слов можно построить используя все буквы из слова «гипербола»? В скольких словах буквы *г* и *и* стоят рядом? В скольких словах буквы *г* и *и* не стоят рядом?
- На полке помещается 10 книг. Имеется 25 книг.
 - Сколько лет нужно их перекладывать, чтобы выложить на полку все сочетания по 10 книг, если менять сочетание каждую неделю?
 - Сколько лет нужно их перекладывать, если сочетания менять пять раз в неделю?

Комбинаторика

- В английском языке 26 букв, среди которых 5 гласных. Определите, сколько слов длины 5 можно составить, если
 - в слове не более двух различных гласных,
 - в слове не более одной гласной,
 - в слове по крайней мере четыре различных гласных буквы.
- Сколько имеется способов рассадить восемь человек за круглым столом? Сколько имеется способов рассадить восемь человек за круглым столом, если двое из них – Смит и Джонс – не должны сидеть рядом

Комбинаторика

Сколько решений в целых числах есть у уравнений:

$$x + y + z = 8, \text{ причем } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$x + y + z + t = 18, \text{ причем } x > 0, y > 0, z > 0, t > 0$$

$$x + y + z + t = 12, \text{ причем } x \geq 1, y \geq 2, z \geq 0, t \geq 1$$

Бином Ньютона

Выпишите разложение:

$$(1+x)^8$$

$$(2x-y)^7$$

Найдите коэффициент $x^2y^3z^5$ в разложении:

$$(x + y + z)^{10}$$

Беспорядки

Перестановка чисел $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots n\}$ (x_i $i=1, n$) такая, что не существует такого $x_i = i$ называется беспорядком.

Посчитать число беспорядков:

1. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots n\}$

Решение рекуррентного соотношения первого порядка

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + n^2, n \geq 1 \\ 0, n = 0 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n-1) + 4, n \geq 1 \\ 0, n = 0 \end{cases}$$

ДЗ:

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 2n + 1, n \geq 1 \\ 1, n = 0 \end{cases}$$

Записать рекуррентное соотношение: Сколько строк длины n построенных из алфавита $\{0,1,2,3\}$ содержат четное число нулей?

Рекуррентное соотношение второго порядка

$$a_n = 6a_{n-1} + 7a_{n-2},$$

$$a_3 = 344, a_4 = 2400,$$

найдите решение при $n \geq 5$

$$a_n = 4a_{n-1} + 4a_{n-2},$$

$$a_0 = 2, a_1 = 6,$$

найдите решение при $n \geq 2$

Производящие функции

3. Найдите разложения приведенных ниже производящих функций:

а) $\frac{1}{x+4}$;

б) $\frac{1}{(x-2)^2}$;

в) $\frac{1}{(x-1)^3}$;

г) $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$;

$$\frac{Ax+B}{(1-Cx)(1-Dx)}, \quad \frac{a}{1-Cx} + \frac{b}{1-Dx}$$

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(1-Dx)(1-Ex)(1-Fx)}, \quad \frac{a}{1-Dx} + \frac{b}{1-Ex} + \frac{c}{1-Fx}$$

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(1-Dx)^2(1-Ex)} = \frac{a}{1-Dx} + \frac{b}{(1-Dx)^2} + \frac{c}{1-Ex}$$

Пример решения рекуррентного отношения через производящую функцию

$$a_0 = 3; \quad a_n - 2a_{n-1} - n = 0.$$

$$a_n = 2a_{n-1} + n.$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots .$$

$$2xf(x) = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + 2a_3x^4 + \dots + 2a_nx^{n+1} + \dots .$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{(1-x)^2} &= x(1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots) = \\ &= x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots . \end{aligned}$$

Продолжение примера

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{x}{(1-x)^2} = a_0 + (a_1 - 2a_0 - 1)x + \\ + (a_2 - 2a_1 - 2)x^2 + \cdots + (a_n - 2a_{n-1} - n)x^n + \cdots .$$

$$f(x) - 2xf(x) - \frac{x}{(1-x)^2} = a_0 = 3.$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)^2} + \frac{3}{(1-2x)} = \frac{3-5x+3x^2}{(1-2x)(1-x)^2} = \\ = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-2x)},$$

Решить через производящую функцию

а) $a_0 = 1;$
 $a_n = a_{n-1} + n$ при $n > 0$.

в) $a_0 = 1;$
 $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ при $n > 0$.

б) $a_0 = 2;$
 $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ при $n > 0$.

г) $a_0 = 1;$
 $a_1 = 8;$
 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2^n$ при $n > 1$.

Найти полином Жегалкина методом
Паскаля для blackbox

Упражнения

1. Доказать аналитически справедливость соотношений:

$$1) \bar{X} (X \vee Y) = \bar{X}Y;$$

$$2) YX \vee Z\bar{X} \vee YZ = YX \vee Z\bar{X};$$

$$3) (Y \vee X) \cdot (Z \vee \bar{X}) \cdot (Y \vee Z) = (Y \vee X) \cdot (Z \vee \bar{X}).$$

2. Привести к ДНФ, СДНФ путем аналитических преобразований:

$$1) \overline{(X_1 \vee X_3)} \cdot (X_1 \rightarrow X_2) =$$

$$2) (X_1 \sim X_2) \cdot \overline{(X_3 \leftarrow X_1)} =$$

$$3) \overline{(X_1 \vee X_2)} \downarrow (X_2 / X_3) =$$

Упражнения

2. Привести к ДНФ, СДНФ путем аналитических преобразований:

$$4) \overline{(X_1 \vee X_2)} \downarrow (X_2 / X_3) =$$

$$5) \overline{(X_2 \rightarrow X_1) \sim (X_3 \leftarrow X_2)} =$$

$$6) (X_1 \vee X_2) \cdot (X_2 \vee \overline{X_3}) \cdot (X_3 \vee X_4) =$$

3. Привести к КНФ, СКНФ путем аналитических преобразований:

$$7) \overline{(X_1 X_2)} \vee X_2 X_3 X_4 \vee \overline{(X_1 X_2) X_3 X_4} =$$

$$8) X_1 X_2 \overline{(X_3 X_4)} \vee \overline{X_1} X_3 =$$